Wykład 10

21 maja 2021
10:11

Supremum istotne rodzin zbiorów.

Def: (Ω, Σ, μ) - pr. z miarą. Powiemy, że rodzina $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ ma <u>niezwykłe supremum istotne</u> jeżeli istnieje $A_0 \in \Sigma$ t. że

1) $\forall_{A \in \mathcal{A}} \; \mu(A \setminus A_0) = 0$ („$A \subseteq A_0$ μ-pw.")

2) Jeżeli $B \in \Sigma$ t. że $\forall_{A \in \mathcal{A}} \; \mu(A \setminus B) = 0$ to $\mu(A_0 \setminus B) = 0$. („A_0 μ-najmniejszy zbiór z wł. 1")

Uwaga: Jeżeli mamy inny zbiór $B_0 \in \Sigma$ spełniający 1) i 2), to

$$\mu(A_0 \triangle B_0) = \mu(A_0 \setminus B_0) + \mu(B_0 \setminus A_0) = 0$$

Czyli zbiór $A_0 \in \Sigma$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do zb. miary zero. Piszemy wtedy

$$A_0 = \mu\text{-}\sup \mathcal{A}.$$

Lemat 1 Dla $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ rodzina

$$\overline{\mathcal{A}} = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} A_k : A_k \subseteq B_k \in \mathcal{A}, k=1,\dots,n, A_k \in \Sigma \right\}$$

jest najmniejszą rodziną zawierającą $\mathcal{A}$ i zamkniętą na skończone sumy oraz na podzbiory. Ponadto

$$\mu\text{-}\sup \mathcal{A} \overset{\mu\text{-p.w.}}{=} \mu\text{-}\sup \overline{\mathcal{A}}$$

o ile któreś z tych supremów istotnych istnieje

Dowód: Pierwsza część oczywista. Załóżmy, że $A_0 = \mu\text{-}\sup \mathcal{A}$ istnieje. 1) Dla $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \overline{\mathcal{A}}$ $(A_k \subseteq B_k \in \mathcal{A})$ mamy

$$\mu(A \setminus A_0) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \setminus A_0\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \setminus A_0)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mu(B_k \setminus A_0)}_{=0 \text{ bo } B_k \in \mathcal{A} \text{ i } A_0 = \mu\text{-}\sup \mathcal{A}} = 0.$$

2) Jeśli zbiór $B \in \Sigma$ ma własność, że $\forall$ ... $\mu(A \setminus B) = 0$ to tym bardziej

Jeśli [illegible]

$\forall_{A\in\bar{\mathcal{A}}}\ \mu(A\setminus B)=0$, to tym bardziej

$\forall_{A\in\mathcal{A}}\ \mu(A\setminus B)=0$, a stąd $\mu(\underset{\mu\text{-sup}\,\mathcal{A}}{\underset{\shortparallel}{A_0}}\setminus B)=0$.

Zatem
$$\mu\text{-sup}\,\mathcal{A} = A_0 = \mu\text{-sup}\,\bar{\mathcal{A}}.$$

Dowód, gdy $\mu\text{-sup}\,\bar{\mathcal{A}}$ istnieje

Lemat 2 Niech (Ω,Σ) prz. mierzalna, $\mathcal{A}\subseteq\Sigma$ rodzina zamknięta na podzbiory oraz skończone sumy. Niech $\mu:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ σ-addytywna funkcja zbioru t. że $\mu(\emptyset)=0$. Wtedy
$$\forall_{A\in\Sigma}\ \bar{\mu}(A)=\sup\{\mu(B):\ B\subseteq A,\ B\in\mathcal{A}\}$$
definiuje miarę na (Ω,Σ).

Dowód: Patrz dowód Tw. 2 Wykładu 7.

Uwaga: μ – miara semiskończona $\Leftrightarrow$ $\mu=\bar{\mu}$

dla $\mathcal{A}=\Sigma_0=\{B\in\Sigma:\ \mu(B)<\infty\}$

Def: μ - lokalizowalna $\iff$

1) μ - semi-skończona

2) każda rodzina $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ posiada μ-sup $\mathcal{A} \in \Sigma$

$\boxed{\text{Lem 3}}$ Niech μ - semiskończona i niech $\Sigma_0 = \{B \in \Sigma : \mu(B) < \infty\}$. NWSR:

1) μ - lokalizowalna

2) każda rodzina $\mathcal{A} \subseteq \Sigma_0$ ma μ-sup $\mathcal{A} \in \Sigma$

3) każda rodzina $\mathcal{A} \subseteq \Sigma_0$ zamknięta na podzbiory oraz skończone sumy posiada μ-sup $\mathcal{A} \in \Sigma$

Dowód: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) oczywiste. Z lematu 1 mamy 2) $\iff$ 3).

2) $\Rightarrow$ 1). Niech $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ dowolna. Połóżmy

$$\mathcal{A}_0 := \{B \in \Sigma_0 : B \subseteq A \text{ dla pewnego } A \in \mathcal{A}\}$$

Z założenia istnieje μ-$\sup \mathcal{A}_0$. Pokażemy, że

$$\mu\text{-}\sup \mathcal{A}_0 = \mu\text{-}\sup \mathcal{A}.$$

1) Niech $A \in \mathcal{A}$. Gdyby $\mu(A \setminus \mu\text{-}\sup \mathcal{A}_0) > 0$

to z semi-skończoności istniałby $B \in \Sigma_0$

$B \subseteq \underbrace{A \setminus \mu\text{-}\sup \mathcal{A}_0}_{\subseteq A}$ oraz $0 < \mu(B) < \infty$. Ale wtedy

$B \in \mathcal{A}_0$ oraz $\mu(B \setminus \mu\text{-}\sup \mathcal{A}_0) = \mu(B) > 0$ ↯

z definicji μ-$\sup \mathcal{A}_0$

Czyli $\mu(A \setminus \mu\text{-}\sup \mathcal{A}_0) = 0 \quad \forall_{A \in \mathcal{A}}$.

2) Jeśli jakiś inny zbiór $A_0 \in \Sigma_0$ jest taki, że

$\forall_{A \in \mathcal{A}} \ \mu(A \setminus A_0) = 0$, to tym bardziej

$\forall_{A \in \mathcal{A}_0} \ \mu(A \setminus A_0) = 0$, skąd

$$\mu(\mu\text{-}\sup \mathcal{A}_0 \setminus A_0) = 0.$$

Stąd $\mu\text{-}\sup A_0 = \mu\text{-}\sup A$. $\blacksquare$

Supremum mierzalne rodzin funkcji

Tw) (tw. Stępkowski)

Niech (Ω, Σ, μ) prz. z miarą taka, że każda rodzina $A \subseteq \Sigma$ posiada $\mu\text{-}\sup A \in \Sigma$. Wtedy każda rodzina $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ funkcji mierzalnych $f_\alpha : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ posiada „mierzalne supremum istotne" tzn. istnieje funkcja mierzalna $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ taka, że

1) $\forall_{\alpha \in I} \quad f_\alpha \leq g \quad \mu\text{-p.w.}$

2) Jeśli $\tilde{g} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mierzalna taka, że $\forall_{\alpha \in I} \quad f_\alpha \leq \tilde{g} \ \mu\text{-p.w.}$, to $g \leq \tilde{g}$ $\mu\text{-p.w.}$

Funkcja g jest wyznaczona jednoznacznie μ-p.w. i wtedy będziemy pisać

$$g = \mu\text{-}\sup_{\alpha \in I} f_\alpha$$

Dowód: Praca magisterska t. S. $\boxed{B}$

$\boxed{B}$ Sprawdzić, czy zachodzi implikacja odwrotna. Czyli każda wartość zb. wiodące prawie wszędzie istotne $\Leftrightarrow$ każda wartość funkcji prawie wszędzie istotne

Def: Siecią elementów zbioru X nazywamy rodzinę $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ poindeksowaną zbiorem skierowanym tzn. I jest wyposażony w częściowy porządek "$\leq$" taki, że

$$\forall_{\alpha, \beta \in I} \ \exists_{\gamma \in I} \ \alpha, \beta \leq \gamma$$

Jeśli X jest prz. topologiczną, to powiemy, że sieć $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ jest zbieżna do $x_0 \in X$ jeśli

$$\forall_{\substack{U\text{-otwarty} \\ x_0 \in U}} \ \exists_{\alpha_0 \in I} \ \forall_{\alpha \geq \alpha_0} \ x_\alpha \in U$$

$\boxed{\text{Tw.}}$ (Tw. o zbieżności monotonicznej dla sieci)

Niech (Ω, Σ, m) prz. z miarą taką, że dowolna wolnu zbiorů $A \subseteq \Sigma$ posiada μ-$\sup A \in \Sigma$

Niech $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ będzie siecią funkcji mierzalnych $f_\alpha : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}^+$, która jest monotoniczna w sensie

$$\forall_{\alpha, \beta \in I} \quad \alpha \leq \beta \Rightarrow f_\alpha \leq f_\beta \quad \mu\text{-p.w.}$$

Wtedy $\mu\text{-}\sup_{\alpha \in I} f_\alpha$ istnieje oraz

$$\int_\Omega \mu\text{-}\sup_{\alpha \in I} f_\alpha \, d\mu = \sup_{\alpha \in I} \int f_\alpha \, d\mu .$$

Dowód: Niech $M := \sup_{\alpha \in I} \int f_\alpha \, d\mu$ i $f := \mu\text{-}\sup_{\alpha \in I} f_\alpha$

Z definicji f mamy $\forall_{\alpha \in I} \quad f_\alpha \leq f$ μ-p.w.

skąd $\forall_{\alpha \in I} \quad \int_\Omega f_\alpha \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu$ i w konsekwencji

$$M \leq \int_\Omega f \, d\mu .$$

Zatem jeśli $M = \infty$, to równość zachodzi $(\infty = \infty)$

Załóżmy zatem, że $M < \infty$.
Weźmy ciąg $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\alpha_n} d\mu = \sup_\alpha \int_\Omega f_\alpha d\mu = M.$$

Korzystając z monotoniczności sieci $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ oraz monotoniczności całki możemy założyć, że
$\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3 \le \dots$ ciąg $\{f_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$
jest monotoniczny $f_{\alpha_1} \le f_{\alpha_2} \le \dots$ μ-p.w.
Z klasycznego Tw. Leviego mamy

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\alpha_n} d\mu = M.$$

Czyli wystarczy pokazać, że $\boxed{\lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n} = f \quad \mu\text{-p.w.}}$

Nierówność $\lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n} \le f$ μ-p.w. jest jasna
bo $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ $f_{\alpha_n} \le f$ μ-p.w.
Żeby wykazać nierówność przeciwną trzeba pokazać, że

$$\forall_{\alpha \in I} \quad f_\alpha \leq \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n} \quad \mu\text{-p.w.}$$

Załóżmy nie wprost, że $\exists_{\alpha_0 \in I}$ t. że zbiór

$A = \{\omega : f_{\alpha_0}(\omega) > \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n}(\omega)\}$ ma niezerową miarę. Wtedy

$$\int_A f_{\alpha_0} - \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n}(\omega)\, d\mu > 0$$

~~Zauważmy, że $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, gdzie $A_k = \{\omega \in A : \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n}(\omega) \leq k\}$~~

~~Czyli wtedy, że zbiór A_k ma niezerową miarę.~~

~~(jeśli μ - semiskończona, to możemy założyć, że $0 < \mu(A_k) < \infty$) i wtedy~~

nie potrzebne

$$\int_{A_k} \lim f_{\alpha_n}\, d\mu \leq \mu(A_k) \cdot k < \infty$$

$$\boxed{\int_A \lim_n f_{\alpha_n}\, d\mu \leq M < \infty \qquad \int_A f_\alpha\, d\mu \leq M < \infty}$$

(*)

oraz

$$0 < \varepsilon := \int_{A_k} \underbrace{f_{\alpha_0} - \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n}}\, d\mu = \int_{A_k} f_{\alpha_0}\, d\mu - \int_{A_k} \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n}$$

Dla dostatecznie dużego $N \in \mathbb{N}$ mamy

$$\int_\Omega f_{\alpha_N}\, d\mu > M-\varepsilon.$$

Niech $\beta \in I$ t. że $\alpha_0, \alpha_N \leq \beta$. Wtedy

$$M-\varepsilon < \int_\Omega f_{\alpha_N}\, d\mu = \int_{A_k} f_{\alpha_N}\, d\mu + \int_{\Omega\setminus A_k} f_{\alpha_N}\, d\mu$$

$$\leq \int_{A_k} \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n}\, d\mu + \int_{\Omega\setminus A_k} f_{\alpha_N}\, d\mu$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{A_k} f_{\alpha_0}\, d\mu - \varepsilon + \int_{\Omega\setminus A_k} f_{\alpha_N}\, d\mu$$

$$\overset{\alpha_0,\alpha_N\leq\beta}{\leq} \int_{A_k} f_\beta\, d\mu + \int_{\Omega\setminus A_k} f_\beta\, d\mu - \varepsilon$$

$$= \int_\Omega f_\beta\, d\mu - \varepsilon \qquad \left(M = \sup_\alpha \int f_\alpha\, d\mu\right)$$

$$\leq M-\varepsilon \quad \lightning \quad (M-\varepsilon \not< M-\varepsilon)$$

$\boxed{\text{ID}}$

Def: Powiemy, że miary ν, μ na (Ω, Σ) są wspólnie semi-skończone jeżeli

wspólnie semi-skończone miary

dla pierścienia $\mathcal{F}_{\mu,\nu} = \{B \in \Sigma : \mu(B) < \infty, \nu(B) < \infty\}$

zachodzi

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{F}_{\mu,\nu}, B \subseteq A\} \quad \forall_{A \in \Sigma}$$

$$\nu(A) = \sup\{\nu(B) : B \in \mathcal{F}_{\mu,\nu}, B \subseteq A\}$$

Tw. (Tw. RADONA-NIKODYMA-SEGALA)

Dla semi-skończonej miary μ na (Ω, Σ), NWSR:

1) μ jest lokalizowalna

2) dla dowolnej miary ν na (Ω, Σ) absolutnie ciągłej i wspólnie semi-skończonej z μ istnieje $f_0 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ mierzalna t. że

$$\forall_{A \in \Sigma} \quad \nu(A) = \int_A f_0 \, d\mu$$

Ponadto, f_0 w 2) jest wyznaczona jednoznacznie μ - p.w.